第９講　総合問題(1)

1　平面上に，点Oを中心とし点 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6 を頂点とする正六角形がある．Oを通りその平面上にある直線 l を考え，各 A_k と l との距離をそれぞれ d_k とする．このとき $D=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2+d_5^2+d_6^2$ は l によらず一定であることを示し，その値を求めよ．ただし，$OA_k=r$ とする．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

2 赤球，白球，青球がそれぞれ a 個，b 個，c 個 $(0<a\leqq b\leqq c)$ 入った箱から 2 個の球を同時に取り出すことを考える．

(1) $n=a+b+c$，$s=a^2+b^2+c^2$ とする．取り出した 2 個の球の色が異なる確率 $P(a,\ b,\ c)$ を n，s を用いて表せ．

(2) $n=11$ のとき，$P(a,\ b,\ c)$ を最大にする a，b，c と，そのときの $P(a,\ b,\ c)$ の値を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

3　$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対し，2 乗してちょうど n けたの数となる正の整数の個数を $f(n)$ とする．このとき，$f(n+1)>f(n)$ であることを証明せよ．

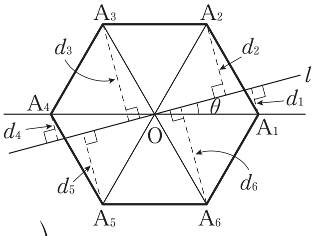
【Point Pickup】

＜ Note ＞

第９講　総合問題(1)

1　平面上に，点Oを中心とし点 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6 を頂点とする正六角形がある．Oを通りその平面上にある直線 l を考え，各 A_k と l との距離をそれぞれ d_k とする．このとき $D=d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2+d_4{}^2+d_5{}^2+d_6{}^2$ は l によらず一定であることを示し，その値を求めよ．ただし，$OA_k=r$ とする．

図形の対称性より直線 l と OA_1 のなす角を



θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 60^\circ)$ としても一般性を失わない．

$d_1=d_4=r\sin\theta$

$d_2=d_5=r\sin(60^\circ-\theta)$

$=r(\sin 60^\circ\cos\theta-\cos 60^\circ\sin\theta)=r\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\dfrac{1}{2}\sin\theta\right)$

$d_3=d_6=r\sin(60^\circ+\theta)=r\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos+\dfrac{1}{2}\sin\theta\right)$

ゆえに　$D=2(d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2)=2r^2\left\{\sin^2\theta+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\dfrac{1}{2}\sin\theta\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2}\sin\theta\right)^2\right\}$

$=2r^2\left(\sin^2\theta+\dfrac{3}{2}\cos^2\theta+\dfrac{1}{2}\sin^2\theta\right)=3r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=\boldsymbol{3r^2}=$(一定)

2　赤球，白球，青球がそれぞれ a 個，b 個，c 個 $(0<a\leqq b\leqq c)$ 入った箱から2個の球を同時に取り出すことを考える．

(1)　$n=a+b+c$，$s=a^2+b^2+c^2$ とする．取り出した2個の球の色が異なる確率 $P(a,\ b,\ c)$ を n，s を用いて表せ．

(2)　$n=11$ のとき，$P(a,\ b,\ c)$ を最大にする a，b，c と，そのときの $P(a,\ b,\ c)$ の値を求めよ．

(1)　取り出した2個の球の色が異なる場合の数は

$ab+bc+ca=\dfrac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}=\dfrac{1}{2}(n^2-s)$（通り）

ゆえに　$P(a,\ b,\ c)=\dfrac{ab+bc+ca}{{}_n C_2}=\boldsymbol{\dfrac{n^2-s}{n(n-1)}}$

(2)　$n=11$のとき　$P(a,\ b,\ c)=\dfrac{121-s}{110}$

また　$a+b+c=11$　$0<a\leqq b\leqq c$であり，a，b，c は整数であることより

$11=a+b+c\geqq a+a+a=3a$

$3a\leqq 11$　　ゆえに　$a=1,\ 2,\ 3$に限られる．

$a=1$ のとき　$b+c=10$ より　$10=b+c\geqq b+b=2b$　　ゆえに　$1\leqq b\leqq 5$

このとき　$s=b^2+c^2+1=b^2+(10-b)^2+1=2b^2-20b+101=2(b-5)^2+51$

よって　$b=5$ のとき最小値 51 をとる．　このとき　$c=5$

$a=2$ のとき　$b+c=9$ より　$9=b+c\geqq 2b$　　ゆえに　$2\leqq b\leqq 4$

このとき　$s=b^2+c^2+4=b^2+(9-b)^2+4=2b^2-18b+85=2\left(b-\dfrac{9}{2}\right)^2+\dfrac{89}{2}$

よって　$b=4$ のとき最小値 45 をとる．　このとき　$c=5$

$a=3$ のとき　$b+c=8$ より　$8=b+c\geqq 2b$　　ゆえに　$3\leqq b\leqq 4$

このとき　$s=b^2+c^2+9=b^2+(8-b)^2+9=2b^2-16b+73=2(b-4)^2+41$

よって　$b=4$ のとき最小値 41 をとる．　このとき　$c=4$

以上より s は，$\boldsymbol{a=3}$，$\boldsymbol{b=c=4}$ のとき最小値をとり，このとき　$P(a,\ b,\ c)$ は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{8}{11}}$ をとる．

3　$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対し，2 乗してちょうど n けたの数となる正の整数の個数を $f(n)$ とする．このとき，$f(n+1)>f(n)$ であることを証明せよ．

2 乗してちょうど n けたの数となる正の整数を k とすると

$$10^{n-1}\leqq k^2<10^n\quad よって\quad 10^{\frac{n-1}{2}}\leqq k<10^{\frac{n}{2}}$$

n が奇数のとき　$f(n)=\left[10^{\frac{n}{2}}\right]-10^{\frac{n-1}{2}}+1$

よって　$10^{\frac{n}{2}}-10^{\frac{n-1}{2}}<f(n)<10^{\frac{n}{2}}-10^{\frac{n-1}{2}}+1$　……①

n が偶数のとき　$f(n)=\left(10^{\frac{n}{2}}-1\right)-\left(\left[10^{\frac{n-1}{2}}\right]+1\right)+1=10^{\frac{n}{2}}-\left[10^{\frac{n-1}{2}}\right]-1$

よって　$10^{\frac{n}{2}}-10^{\frac{n-1}{2}}-1<f(n)<10^{\frac{n}{2}}-10^{\frac{n-1}{2}}$　……②

n が整数のとき，①または②より　$10^{\frac{n}{2}}-10^{\frac{n-1}{2}}-1<f(n)<10^{\frac{n}{2}}-10^{\frac{n-1}{2}}+1$

このとき　$10^{\frac{n+1}{2}}-10^{\frac{n}{2}}-1<f(n+1)$

ここで　$10^{\frac{n+1}{2}}-10^{\frac{n}{2}}-1-\left(10^{\frac{n}{2}}-10^{\frac{n-1}{2}}+1\right)$

$=10^{\frac{n+1}{2}}-2\cdot 10^{\frac{n}{2}}+10^{\frac{n-1}{2}}-2$

$=10^{\frac{n-1}{2}}\left(10-2\sqrt{10}+1\right)-2$

$\geqq 1\cdot\left(11-2\sqrt{10}\right)-2=9-2\sqrt{10}=\sqrt{81}-\sqrt{40}>0$

よって　$f(n)<f(n+1)$

第 9 講　総合問題(1)　練習問題

1　$|\cos^2 x + a\sin x + b| \leqq 3$ がすべての実数 x について成り立つような，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ．

2 xyz 空間内の 3 点P(0, 0, 1), Q(0, 0, -1), R(t, t^2-t+1, 0)を考える.
t が $0 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき, 三角形 PQR が通過してできる立体を K とする. 以下の問いに答えよ.

(1) K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ.

(2) K の体積を求めよ.

第９講　総合問題(1)　　練習問題　解答

1　$\|\cos^2 x + a\sin x + b\| \leqq 3$ がすべての実数 x について成り立つような，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ．

解答例

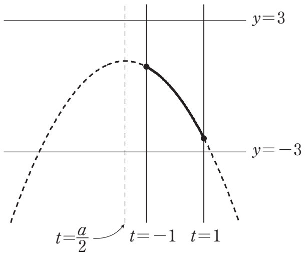
$\sin x = t$ とおくと，$-1 \leqq t \leqq 1$

このとき　$|\cos^2 x + a\sin x + b| \leqq 3$　……①　は

$$|1 - t^2 + at + b| \leqq 3 \quad \text{つまり} \quad -3 \leqq -t^2 + at + b + 1 \leqq 3 \quad \cdots\cdots ②$$ と変形できる．

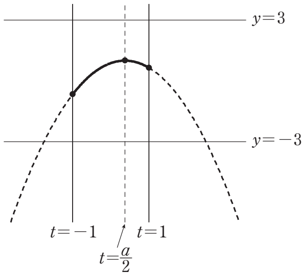
①がすべての実数 x で成り立つ条件は，②が $-1 \leqq t \leqq 1$ のすべての実数 t で成り立つ条件である．

$$f(t) = -t^2 + at + b + 1 = -\left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + b + 1$$ とおく．



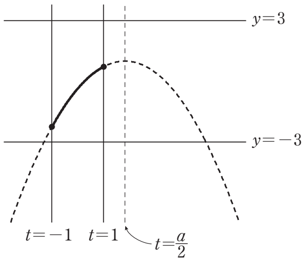
$\dfrac{a}{2} < -1$　つまり　$a < -2$ のとき

$$\begin{cases} f(-1) \leqq 3 \\ f(1) \geqq -3 \end{cases} \quad \text{よって} \quad \begin{cases} b \leqq a + 3 \\ b \geqq -a - 3 \end{cases}$$



$-1 \leqq \dfrac{a}{2} \leqq 1$　つまり　$-2 \leqq a \leqq 2$ のとき

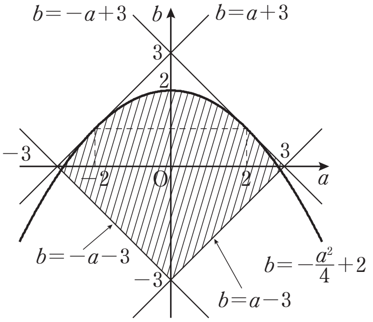
$$\begin{cases} f\left(\dfrac{a}{2}\right) \leqq 3 \\ f(1) \geqq -3 \\ f(-1) \geqq -3 \end{cases} \quad \text{よって} \quad \begin{cases} b \leqq -\dfrac{a^2}{4} + 2 \\ b \geqq -a - 3 \\ b \geqq a - 3 \end{cases}$$



$1 < \dfrac{a}{2}$　つまり　$2 < a$ とき

$$\begin{cases} f(-1) \geqq -3 \\ f(1) \leqq 3 \end{cases} \quad \text{よって} \quad \begin{cases} b \geqq a - 3 \\ b \leqq -a + 3 \end{cases}$$

以上より，点 $(a,\ b)$ の存在範囲は，下図斜線部分（境界含む）



2　xyz 空間内の 3 点 P(0, 0, 1)，Q(0, 0, −1)，R(t, t^2-t+1, 0)を考える．
t が $0 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，三角形 PQR が通過してできる立体を K とする．以下の問いに答えよ．

(1)　K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ．

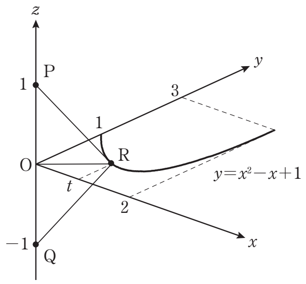
(2)　K の体積を求めよ．

解答例

(1)　点 R が xy 平面に描く軌跡は

$$y=x^2-x+1 \quad (0 \leqq x \leqq 2) \quad \cdots\cdots ①$$

求める断面は，①上の点と (0, 0) を結ぶ線分が描く領域である．



①において　$y'=2x-1$

よって，①の $x=t$ における接線の方程式は

$$y=(2t-1)(x-t)+t^2-t+1 \quad \text{つまり} \quad y=(2t-1)x-t^2+1$$

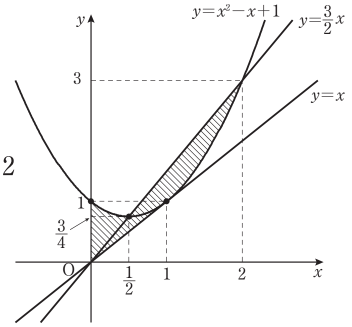
これが原点を通るときは　$-t^2+1=0$　つまり　$t=1$　のとき

このときの接線の方程式は　$y=x$

また，原点を通り (2, 3) を通る直線は　$y=\dfrac{3}{2}x$

この直線と①との交点の x 座標は

$$\frac{3}{2}x=x^2-x+1 \quad \text{より} \quad 2x^2-5x+2=0 \qquad x=\frac{1}{2},\ 2$$



したがって，K を xy 平面で切ったときの断面は

右図斜線部分．ただし境界含む．

よって求める面積 S は

$$S=\int_0^1\{(x^2-x+1)-x\}dx+\int_{\frac{1}{2}}^2\left\{\frac{3}{2}x-(x^2-x+1)\right\}dx$$

$$=\int_0^1(x-1)^2\,dx-\int_{\frac{1}{2}}^2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1+\frac{1}{6}\left(2-\frac{1}{2}\right)^3$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{9}{16}$$

$$=\boldsymbol{\frac{43}{48}}$$

(2)　K は錐体であることを考慮し，求める体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot 1\times 2=\boldsymbol{\frac{43}{72}}$$